

## Zadanie egzaminacyjne

2. Dany jest model dwurównaniowy:

$$\begin{aligned}y_{t1} &= \beta_{21}y_{t2} + \gamma_{11}x_{t1} + \varepsilon_{t1} \\ y_{t2} &= \beta_{12}y_{t1} + \gamma_{22}x_{t2} + \varepsilon_{t2}\end{aligned}$$

- a) Przedstawić zapis macierzowy postaci strukturalnej, określić jego klasę
- b) Zbadać identyfikowalność równań modelu
- c) W oparciu o podane w tabeli obserwacje zmiennych oszacować parametry obu równań modelu i błędy średnie ich szacunku podwójną MNK, sprawdzić, że pośrednia MNK daje takie same wyniki,

| $y_{t1}$ | $y_{t2}$ | $x_{t1}$ | $x_{t2}$ |
|----------|----------|----------|----------|
| 1        | 1        | 0        | 1        |
| 1        | 1        | 0        | 1        |
| 2        | 2        | 0        | 2        |
| 1        | 2        | 1        | 0        |
| 2        | 2        | 0        | 2        |
| 5        | 6        | 3        | 0        |

### Rozwiązanie:

a) Postać strukturalna:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} y_{t1} & y_{t2} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} x_{t1} & x_{t2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\gamma_{11} & 0 \\ 0 & -\gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t1} & \varepsilon_{t2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_t & & \mathbf{B} & & \mathbf{x}_t & & \mathbf{\Gamma} & & \mathbf{\varepsilon}_t \end{array}$$

Macierz B ani diagonalna, ani trójkątna, zatem model jest modelem o równaniach współzależnych.

b) identyfikowalność

Ponieważ macierz współczynników formy zredukowanej  $\Pi = -\Gamma \mathbf{B}^{-1}$ , zatem  $\Pi \mathbf{B} = -\Gamma$ , a dla  $i$ -tego równania  $\Pi \beta^{(i)} = -\gamma^{(i)}$ , gdzie macierz  $\Pi$  ma wymiar 2x2 (liczba zmiennych z góry ustalonych razy liczba równań modelu). Dla  $i$ -tego równania będziemy więc mieć układ 2 równań z tyloma niewiadomymi ile łącznie będzie nieznanymi parametrów w wektorach  $\beta^{(i)}$  i  $\gamma^{(i)}$ .

I równanie:

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

mamy zatem 2 równania i 2 parametry, więc równanie pierwsze jest jednoznacznie identyfikowalne.

II równanie: 
$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\beta_{12} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

tutaj też mamy zatem 2 równania i 2 parametry, więc równanie drugie też jest jednoznacznie identyfikowalne.

c) estymacja

Najpierw oszacujemy parametry formy zredukowanej:  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \Pi + \mathbf{V}$ , gdzie

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} &= (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,6 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{12} \\ \hat{\pi}_{21} & \hat{\pi}_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a wobec tego:

$$\hat{Y} = X \hat{\Pi} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1 & \hat{Y}_2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,6 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1 & \hat{Y}_2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1,6 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4,8 & 6 \end{pmatrix}$$

2MNK dla I równania:

$$Z_1 = [\hat{Y}_2 \quad X_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\delta}^{(1)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{21} \\ \hat{\gamma}_{11} \end{bmatrix} = (Z_1^T Z_1)^{-1} Z_1^T Y_1 = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 42 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 42 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y}_{t1} = 1,0000 \quad y_{t2} \quad -0,4000 \quad x_{t1}$$

$$\hat{\xi}_1 = y_1 - \hat{y}_1 = y_1 - [Y_2 \quad X_1] \cdot \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\gamma}_{11} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1,6 \\ 2 \\ 2 \\ 4,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,6 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{N - K_1} \hat{\xi}_1^T \hat{\xi}_1 = 0,4/(6-2) = 0,1$$

$$D^2(\hat{\delta}^{(1)}) = S_1^2 (Z_1^T Z_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,01 & -0,02 \\ -0,02 & 0,05 \end{pmatrix}$$

$$D(\hat{\delta}^{(1)}) = \begin{bmatrix} D(\hat{\beta}_{21}) \\ D(\hat{\gamma}_{11}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1000 \\ 0,2236 \end{pmatrix}$$

2MNK dla II równania:

$$Z_2 = [\hat{Y}_1 \quad X_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1,6 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4,8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\delta}^{(2)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\gamma}_{22} \end{bmatrix} = (Z_2^T Z_2)^{-1} Z_2^T Y_2 = \begin{pmatrix} 35,6 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 42 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,0391 & -0,0391 \\ -0,0391 & 0,1391 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 42 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 \\ -0,25 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y}_{t2} = 1,2500 y_{t1} - 0,2500 x_{t2}$$

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_2 = y_2 - \hat{y}_2 = y_2 - [Y_1 \quad X_2] \cdot \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\gamma}_{22} \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,25 \\ -0,25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1,25 \\ 2 \\ 6,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,75 \\ 0 \\ -0,25 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$S_2^2 = \frac{1}{N - K_2} \hat{\xi}_2^T \hat{\xi}_2 = 0,625/(6-2) = 0,1563$$

$$D^2(\hat{\delta}^{(2)}) = S_2^2 (Z_2^T Z_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0061 & -0,0061 \\ -0,0061 & 0,0217 \end{pmatrix}$$

$$D(\hat{\delta}^{(2)}) = \begin{bmatrix} D(\hat{\beta}_{12}) \\ D(\hat{\gamma}_{22}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0781 \\ 0,1474 \end{pmatrix}$$

Teraz dla kontroli oszacujemy parametry poszczególnych równań za pomocą pośredniej metody najmniejszych kwadratów (jest to możliwe, bo równania są jednoznacznie identyfikowalne).

$$\text{Ponieważ } \begin{pmatrix} 1,6 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{12} \\ \hat{\pi}_{21} & \hat{\pi}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{i } \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{12} \\ \hat{\pi}_{21} & \hat{\pi}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\hat{\beta}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{stąd } \begin{cases} 1,6 - 2\hat{\beta}_{21} = \hat{\gamma}_{11} \\ 1 - \hat{\beta}_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\text{zatem } \hat{\beta}_{21} = 1 \quad \hat{\gamma}_{11} = -0,4$$

a także 
$$\begin{bmatrix} \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{12} \\ \hat{\pi}_{21} & \hat{\pi}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\hat{\beta}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\gamma}_{22} \end{bmatrix}$$

wobec tego 
$$\begin{cases} 1,6 \hat{\beta}_{12} - 2 = 0 \\ -\hat{\beta}_{21} + 1 = \hat{\gamma}_{22} \end{cases}$$

zatem 
$$\hat{\beta}_{12} = 1,25 \qquad \hat{\gamma}_{22} = -0,25$$

Jak widać, wszystko się zgadza: oceny parametrów uzyskane za pomocą pośredniej i podwójnej metody najmniejszych kwadratów są takie same (co było do przewidzenia).